**Phương pháp 3: Dùng hẳng đẳng thức**

# Phương pháp dùng hằng đẳng thức:

* 1. **Phương pháp:**

Điểm mấu chốt khi giải hệ bằng phương pháp là biến đổi theo các hằng đẳng thức:

* 1. **Một số ví dụ:**

**Ta xét các ví dụ sau:**

**Ví dụ 1:** Giải các hệ phương trình sau

a)  b) 

***Lời giải***

a) Điều kiện: .Phương trình (1) tương đương:



Đặt . Ta có phương trình:  . Do  suy ra phương trình cho ta 

 thay vào ta có: Đặt  ta có hệ phương trình sau:

.

Vậy hệ có nghiệm



b) Điều kiện: .

Ta viết lại phương trình (1) thành:  

Dễ thấy  không phải là nghiệm. Khi  thay vào (2) ta được:



(thỏa mãn). Vậy hệ có nghiệm .

**Ví dụ 2:** Giải các hệ phương trình sau

1. 
2. 

***Lời giải***

a) Điều kiện: .

Ta thấy  không là nghiệm của hệ. chia hai vế của (1) cho  ta được:

. Đặt  ta có phương trình:  suy ra 

. Từ đó tính được 

Vậy hệ đã cho có nghiệm .

b) Điều kiện: .Ta thấy khi  thì hệ không có nghiệm.

Chia phương trình (1) cho :



.

Đặt . Ta có .

Thay vào (2) ta được: .

. Vậy hệ có nghiệm .

**Ví dụ 3:** Giải các hệ phương trình sau

1.  
2. 

***Lời giải***

1. Điều kiện: 

Biến đổi phương trình (1) ta có:  Đặt  ta có” 



Thay vào (2) ta có: 

Điều kiện xác định của phương trình (4) là: 









  

Ta có  do điều kiện 

Kết luận: 

1. Điều kiện: .

Nhận thấy  thì hệ vô nghiệm. Ta xét khi 

Từ phương trình (1) ta sử dụng phương pháp liên hợp:

PT(1)

Rõ ràng  , từ đó suy ra .

Thay vào (2) ta được: .

Biến đổi phương trình đã cho tương đương:



.

Đặt suy ra .

Vậy hệ có nghiệm .

**Dạng 4: Phương pháp phân tích thành nhân tử để giải hệ phương trình**

A. Kiến thức

Bài toán: Giải hệ phương trình 

+ Phân tích 1 trong 2 phương trình trên, hoặc tổ hợp của 2 phương trình trên thành nhân tử (kết hợp cả 2 phương trình để tạo ra phương trình mới)

Giả sử: 

Thông thường  và  là hàm số bậc nhất hoặc bậc hai.

Ví dụ: 



+ HPT đã cho  hoặc 

\*) Chú ý: Dạng toán này ta có thể sử dụng Delta để phân tích đa thức thành nhân tử:

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có phương trình (1) 

Vậy 



Xét 2 trường hợp và tìm được nghiệm của hệ phương trình.

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Phương trình 

+ TH1: , thay vào phương trình (2) ta được: 



+ TH2: , thay vào phương trình (2) ta được:  (vô nghiệm).

**Bài 2:** *Chuyên TPHN, năm học 2018*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có (1) 

+ TH1: , thay vào phương trình (2) ta được



+ TH2: , thay vào phương trình (2) ta được



**Bài 3:** *Chuyên Trần Phú Hải Phòng, năm học 2013*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có 



+  (phương trình vô nghiệm).

Cách khác: Ta có  xét 2 trường hợp.

**Bài 4:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

+ TH1:  thay vào (2) ta được 

+ TH2: . Ta có 



Phương trình (2): 

 vô nghiệm.

Vậy 

**Bài 5:** HSG TPHN, năm học 2011

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Phân tích: Ta có phương trình 





Với hướng phân tích trên ta có lời giải:

HPT 



+) TH1:  thay vào phương trình (2) ta được: 

+) TH2:  tương tự như TH1.

**Bài 6:** Đại học khối D, năm học 2012

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có 





+) TH1:  thay vào phương trình (1) ta được: 



+) TH2:  thay vào phương trình (1) ta được:

.

**Bài 7:** Đại học khối A, năm học 2011

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Ta có phương trình (2) 



+) TH1: . Thay vào phương trình (1) ta được:



+) TH2: . Thay vào phương trình (1) ta được: 





Kiểm tra và kết luận nghiệm của hệ phương trình.

**Bài 8:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Hệ phương trình 

Cộng vế tương ứng ta được: 



+) TH1:  thế vào phương trình  ta được: 

 Giải phương trình tìm được  sau đó tìm được 

+) TH2:  làm tương tự.

**Dạng 5: Phương pháp đánh giá giải hệ phương trình**

**I. Kiến thức**

Giải hệ phương trình 

Sử dụng phương pháp đánh giá

Từ (1)(2) ta rút ra được , nhưng đồng thời chỉ ra được 

Từ đó tính được nghiệm 

Cụ thể:

+ Giả sử  và chỉ ra được 

+ Sử dụng điều kiện của phương trình bậc hai có nghiệm

+ Áp dụng các bất đẳng thức cơ bản





**Bài 1:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện: 

Do , dấu “=” xảy ra 

Tương tự ta có: , dấu “=” xảy ra 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Cách 1: Giải sử 

Tương tự ta có 

Cách 2: Chứng minh được 

Cách 3: Lấy 

Từ 

- Nếu 

- Nếu 

Với , ta có 

Vậy 

Thay  vào phương trình (1) ta có:



Vậy 

**Bài 3:** *Chuyên Hòa Bình, năm học 2017*

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Từ 

Từ 

Phương trình trên có nghiệm 

Từ (3)(4) 

Mặt khác ta có 

Thay  vàp HPT, ta được 

Vậy 

**Bài 4:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Phương trình (1) là phương trình bậc hai ẩn , nên 

Phương trình (2) 

Từ (3)(4) 

Thay  vàp HPT ta được 

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình: 

**Lời giải**

Điều kiện 

Cộng từng vế của (1) và (2) ta được 

Từ 

Ta có 

Tương tự ta có 

Cộng vế với vế của (3) và (4) ta được: 

Vậy phương trình (\*) tương đương các bất đẳng thức ở (3)(4)(5) xảy ra dấu “=” 

Thử lại vế HPT đã cho thấy thỏa mãn

Vậy PHT có nghiệm .

**Ví dụ 1:** Giải các hệ phương trình sau

1.  
2. 

***Lời giải***

Xét phương trình (1) của hệ ta có:

. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của  thì ta có: . Từ đó suy ra



Trường hợp 1: . Từ phương trình  của hệ ta có điều kiện:  suy ra phương trình vô nghiệm

Trường hợp 2:  thay vào phương trình thứ hai ta có:





Vậy hệ có một cặp nghiệm: 

b) Xét phương trình (1) của hệ ta có:

.

Coi đây là phương trình bậc 2 của  ta có:



Suy ra 

Trường hợp 1:  thay vào phương trình (2) ta thu được:







Do  nên 

Trường hợp 2:  thay vào phương trình (2) ta thu được:



Giải tương tự như trên ta được .

Kết luận: Hệ phương trình có 2 cặp nghiệm: 

**Ví dụ 2:** Giải các hệ phương trình sau

1. 
2. 
3. 

***Lời giải***

Điều kiện: .

Phương trình (1) tương đương 



Coi đây là phương trình bậc 2 của  ta có:



suy ra 

Trường hợp 1: .

Do  suy ra phương trình vô nghiệm.

Trường hợp 2:  thay vào phương trình 2 của hệ ta có:



Ta có: .

Nghĩa là , suy ra .

Vậy hệ có nghiệm .

b) Điều kiện: .

Từ phương trình dễ thấy để phương trình có nghiệm thì: .

Ta viết phương trình thứ nhất dưới dạng:

.

Để bình phương được ta cần điều kiện: .

Ta bình phương hai vế được:

 (1).

Ta đưa phương trình (2) về dạng:  (2).

Thế (2) vào (1) ta được:

 .

\* Với , ta có thêm  thay vào phương trình (2) ta có: .

Vì , ta dễ thấy: , nên suy ra phương trình vô nghiệm.

\* Với , thay vào phương trình (2) ta được: . Đặt  khi đó ta thu được phương trình:

.

Hệ có một cặp nghiệm duy nhất: 

c). Điều kiện .

Ta viết phương trình (1) thành: . Bình phương 2 vế ta thu được: . Thay vào phương trình  của hệ ta có:

. Ta coi đây là phương trình bậc 2 của  thì  suy ra 

Trường hợp 1: thay vào phương trình (1) ta có:  vô nghiệm

Trường hợp 2:  thay vào phương trình (1) ta thu được:



Vậy hệ phương trình có 1 cặp nghiệm: 

**Bài 10: LUYỆN TẬP GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH**

**Bài 1:** ĐHKHTN Hà Nội, năm học 2014

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Ta có 





+ TH1:  thay vào (3) vô nghiệm.

+ TH2:  thay vào (3) ta được: 

+ TH3:  thay vào (2) ta được: 

Vậy HPT có 4 nghiệm 

**Bài 2:** Chuyên Bà Rịa Vũng Tàu, năm học 2018

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Ta có 

+ TH1: 

+ TH2: 

Ta có 

Vậy HPT có nghiệm 

**Bài 3:** Chuyên LHP Nam Định, năm học 2018

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Điều kiện 

Đặt 



Phương trình (1) trở thành





Thay vào phương trình (2) ta được 

Với điều kiện 





Thay vào điều kiện ban đầu, thảo mãn điều kiện (\*).

**Bài 4:** Chuyên Bến Tre, năm học 2018

Giải hệ phương trình 

**Lời giải**

Cách 1: Ta có 

Cách 2: Từ 

Cách 3: Từ 

Thay  vào (\*) ta được 

Thay vào phương trình (1) ta được:





Vậy HPT có nghiệm duy nhất .

1.  (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2008) .
2.  (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2008) .
3.  (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2009) .
4.  (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .
5.  (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2010) .
6.  (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2011) .
7.  (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2012) .
8.  (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .
9.  (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2014) .
10.  (Trích đề tuyển sinh vòng 1- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .
11. (Trích đề tuyển sinh vòng 2- lớp 10 THPT Chuyên ĐHQG Hà Nội 2015) .
12. . (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Amsterdam và Chu Văn An năm 2014)
13. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Phan Bội Châu – Nghệ An 2014)
14.  (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Lam Sơn Thanh Hóa 2014)
15. (Trích đề thi tuyển sinh vào lớp 10 chuyên Thái Bình 2014).
16. 
17. 
18. 
19. 
20. 

# HƯỚNG DẪN GIẢI BÀI TẬP:

1. Ta viết lại hệ phương trình thành: 

Đặt  ta có hệ mới  .

Suy ra .

Mặt khác ta cũng có: .

Tương tự ta cũng có .

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi  hoặc .

Từ đó suy ra các nghiệm của hệ là: .

1. Hệ phương trình có dạng gần đối xứng từ hệ ta suy ra:

 thay vào một phương trình ta tìm được nghiêm là: 

Ta có thể giải nhanh hơn như sau: Lấy phương trình (2) trừ 6 lần phương trình (1) thì thu được: .

1. Từ hệ phương trình suy ra. Đây là phương trình bậc 2 của  có 

Từ đó tính được  hoặc  thay vào ta tìm được các nghiệm là 

Chú ý ta có thể giải cách khác:

.

1. Nhận xét: Có thể đưa hệ về dạng đẳng cấp: Từ hệ ta suy ra

 . Giải hệ với 2 trường hợp ta suy ra .

Cách khác: Cộng hai phương trình của hệ ta thu được:  rồi thay vào để giải như trên.

1. Ta viết lại hệ đã cho thành: 

Nhân hai vế của phương trình: (2) với 2 rồi cộng với phương trình (1) ta được:

 thay vào ta tìm được  hoặc .

Cách khác: Ta viết lại hệ thành:  đây là hệ đối xứng loại 1.

1. Nhận xét  là nghiệm của hệ. Xét . Ta chia 2 phương trình cho 

 .

Đặt  thu được .

Từ đó tìm được nghiệm là .

1. Ta viết lại hệ phương trình thành:  đây là hệ đối

Xứng loại 1, ta dễ tìm được  hoặc .

Từ đó giải được  hoặc .

Cách khác: Ta viết lại hệ thành:

.

1. Từ hệ ta suy ra

 .

Giải hệ ứng với 2 trường hợp ta có: , 

1. Ta viết hệ đã cho thành: 

.

Giải 3 trường hợp ta thu được: .

1. Từ hệ ta suy ra:

.

Giải 2 trường hợp ta thu được .

1. Ta viết lại hệ đã cho thành: 

Chú ý rằng: 

suy ra: 



thay vào ta tìm được: .

1. Hệ đã cho tương đương với:



Cộng theo vế hai phương trình ta được: 

 (tm)

Vậy hệ có nghiệm .

Điều kiện: .

1. Hệ phương tình đã cho tương đương: .

Đặt , hệ thành:  

Suy ra  hoặc .

Nếu  thì  (tm).

Nếu  thì  (tm).

1. Điều kiện . Đặt 

Từ phương trình  suy ra 

Thay vào phương trình  ta có: . Đặt .

Thay vào phương trình ta có: .

Từ đó tìm được các nghiệm của hệ là 

1. Phương trình (1) của hệ có thể viết lại như sau: 

Thay vào phương trình (2) của hệ ta tìm được các nghiệm là .

1. Từ phương trình ( 2) ta có: 

Hay 

Hay 

Hay . Thay vào phương trình đầu tìm được nghiệm của hệ là: .

1. Dễ thấy hệ có nghiệm .

Nếu  hệ phương trình tương đương với:.

Đặt  và cộng hai phương trình của hệ ta thu được: 

.Ta được: 

1. Ta có: .

Hệ tương đương với .

1. Hệ tương đương: 



+)

+) 

Vậy nghiệm của hệ:  , .